**La relation d’Euler - sous-titres**

1

00:00:26,000 --> 00:00:30,999

Bonjour à toutes et à tous ! Bienvenu·e·s

dans cette session dédiée à la topologie,

2

00:00:31,000 --> 00:00:36,500

et plus spécifiquement aux graphes planaires,

qui font partie de la combinatoire.

3

00:00:37,000 --> 00:00:39,700

Donc on va commencer cette session.

4

00:00:41,000 --> 00:00:44,999

Pour cette session, vous aurez besoin de

petites feuilles de papier ;

5

00:00:45,000 --> 00:00:50,000

de quelques stylos (pas forcément de couleur) ;

6

00:00:51,000 --> 00:00:54,000

d'une règle graduée ; et d'une feuille à

carreaux.

7

00:00:54,500 --> 00:00:58,500

Comme je vous l'ai dit, nous allons étudier

les graphes planaires.

8

00:01:00,000 --> 00:01:02,100

Le mieux, c'est de commencer par en dessiner

quelques-uns

9

00:01:02,500 --> 00:01:05,000

donc laissez-moi vous expliquer comment

les dessiner.

10

00:01:05,200 --> 00:01:08,900

Pour dessiner un graphe planaire, il suffit

de dessiner d'abord des sommets,

11

00:01:09,000 --> 00:01:12,000

que je vais faire avec des cercles verts.

12

00:01:18,000 --> 00:01:25,500

Ensuite, il suffit de relier ces sommets

par des arêtes.

13

00:01:27,000 --> 00:01:29,900

Il est complètement autorisé de relier un

sommet à lui-même

14

00:01:30,000 --> 00:01:34,000

on peut tout à fait faire une boucle comme ceci.

15

00:01:35,700 --> 00:01:42,000

On peut aussi dessiner plusieurs arêtes

entre deux sommets, comme ceci.

16

00:01:42,500 --> 00:01:44,000

Ceci est autorisé !

17

00:01:47,000 --> 00:01:49,900

Pour dessiner un graphe planaire, il faut

juste suivre deux règles.

18

00:01:50,000 --> 00:01:55,900

La première règle à respecter, c'est que

quand on dessine des arêtes entre des sommets

19

00:01:56,000 --> 00:01:59,900

on ne doit pas faire se croiser les arêtes.

Donc cette situation n'est pas autorisée.

20

00:02:00,000 --> 00:02:04,900

Règle numéro 2 : à la fin, le graphe qu'on

obtient (on obtient un graphe une fois

21

00:02:05,000 --> 00:02:07,900

(on obtient un graphe une fois qu'on a

dessiné les arêtes et les sommets)

22

00:02:08,000 --> 00:02:10,900

le graphe qu'on obtient doit être connecté.

23

00:02:11,000 --> 00:02:14,500

C'est-à-dire que, si on veut aller d'un

sommet à un autre,

24

00:02:14,600 --> 00:02:19,900

il doit exister un chemin avec des arêtes,

qui les relie.

25

00:02:20,000 --> 00:02:24,000

Sauf que là dans cet exemple, il y a deux

ensembles d'arêtes et de sommets

26

00:02:24,100 --> 00:02:27,900

qui ne sont pas reliés entre eux,

donc le graphe est déconnecté.

27

00:02:28,000 --> 00:02:35,500

Pour que ce graphe soit admissible, il suffit

de dessiner une arêtes entre ces ensembles.

28

00:02:35,600 --> 00:02:38,900

Ce que je vous propose, c'est d'en dessiner

entre 5 et 10.

29

00:02:39,000 --> 00:02:42,900

Donc mettez en pause la vidéo,

et prenez vos petites feuilles de papier

30

00:02:43,000 --> 00:02:46,500

et sur chaque feuille de papier,

vous dessinez un graphe.

31

00:02:52,500 --> 00:02:56,900

Voilà ! Par exemple, j'en ai dessinés 8

sur 8 feuilles de papier différentes.

32

00:02:58,000 --> 00:02:59,000

Prenons ce graphe par exemple.

33

00:02:59,100 --> 00:03:02,900

Il y a plusieurs choses que l'on peut

regarder vis-à-vis de ce graphe.

34

00:03:03,000 --> 00:03:05,400

Tout d'abord, on peut regarder le nombre de

sommets,

35

00:03:05,500 --> 00:03:08,200

les sommets sont les cercles en vert ici.

36

00:03:08,300 --> 00:03:12,000

Notons S le nombre de sommets.

37

00:03:13,000 --> 00:03:16,700

Pour compter le nombre de sommets si vous

avez un graphe un petit peu compliqué,

38

00:03:16,800 --> 00:03:18,999

ce que je vous propose c'est,

en même temps que vous les comptez

39

00:03:19,000 --> 00:03:30,500

vous pouvez remplir les sommets.

Par exemple ici on a 1, 2, 3, 4, 5, 6 sommets

40

00:03:30,600 --> 00:03:33,500

Donc S est égal à 6.

41

00:03:35,000 --> 00:03:38,000

Et on va noter A le nombre d'arêtes.

42

00:03:38,500 --> 00:03:42,000

Pareil que pour les sommets, si vous avez un

graphe un petit peu compliqué,

43

00:03:42,400 --> 00:03:45,999

vous pouvez vous tromper (oublier une arête

ou en compter une deux fois)

44

00:03:46,000 --> 00:03:48,700

donc ce que je vous propose pour compter le

nombre d'arêtes,

45

00:03:48,800 --> 00:03:51,000

c'est de barrer chaque arête que vous comptez.

46

00:03:51,100 --> 00:04:05,000

Par exemple, ici on a 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8,

9, 10 arêtes. Donc A=10.

47

00:04:06,000 --> 00:04:10,000

Enfin, les derniers objets que l'on peut avoir

avec un graphe planaire, ce sont les faces.

48

00:04:10,200 --> 00:04:14,500

Pour compter le nombre de faces,

je vous propose de partir du milieu d'une arête

49

00:04:14,600 --> 00:04:18,500

par exemple celle-ci,

vous suivez l'arête dans une direction

50

00:04:18,600 --> 00:04:22,000

par exemple celle-ci.

51

00:04:22,500 --> 00:04:26,500

Et à la fin de revenir au premier endroit.

52

00:04:26,600 --> 00:04:31,900

Et ce cycle-là,

cela définit une face de votre graphe.

53

00:04:32,000 --> 00:04:34,500

On va noter F le nombre de faces.

54

00:04:46,000 --> 00:04:47,900

N'oubliez pas à l'extérieur aussi :

55

00:04:48,000 --> 00:04:51,500

si vous partez de ce point par exemple

et que vous suivez le graphe

56

00:04:51,550 --> 00:04:56,500

dans une direction, par exemple cette direction

Eh bien vous verrez que vous êtes obligé·e

57

00:04:56,550 --> 00:05:02,000

de suivre tout l'extérieur du graphe.

Ceci forme la face extérieure.

58

00:05:02,200 --> 00:05:07,800

N'oubliez pas de compter cette face également.

59

00:05:08,000 --> 00:05:14,000

Et donc là on a combien de faces ?

On en a 1, 2, 3, 4, 5 et 6. Donc F=6.

60

00:05:19,000 --> 00:05:22,900

Je veux vous montrer cet exemple de graphe

parce qu'il est un petit peu particulier

61

00:05:23,000 --> 00:05:27,000

En effet, vous voyez ici des arêtes

qui sont un peu isolées.

62

00:05:27,050 --> 00:05:30,500

Je vais vous montrer un peu pour que vous ne

vous trompiez pas.

63

00:05:37,000 --> 00:05:40,000

Là vous voyez que l'on passe encore une

deuxième fois le long de cette arête

64

00:05:41,000 --> 00:05:44,500

et vous voyez qu'à la fin, on va revenir au

point de départ.

65

00:05:45,000 --> 00:05:49,000

Et donc là, la face à l'extérieur a une forme

un petit peu bizarre,

66

00:05:50,000 --> 00:05:51,500

mais c'est tout de même une face.

67

00:05:51,600 --> 00:05:57,000

Ce que je vous propose, c'est de prendre tous

vos graphes et de compter pour chaque graphe

68

00:05:57,100 --> 00:06:01,500

le nombre de sommets, le nombre d'arêtes et le

nombre de faces, et de l'écrire en-dessous.

69

00:07:15,000 --> 00:07:19,200

Maintenant que vous avez compté le nombre

de sommets, d'arêtes et de faces,

70

00:07:19,300 --> 00:07:21,500

d'abord vous allez tracer deux axes :

71

00:07:21,600 --> 00:07:27,500

un axe vertical avec votre règle graduée

et un axe horizontal.

72

00:07:28,000 --> 00:07:33,900

L'axe horizontal, vous allez le graduer

entre 1 et une vingtaine,

73

00:07:34,000 --> 00:07:35,700

et de même pour l'axe vertical.

74

00:07:35,800 --> 00:07:39,200

Les graduations doivent être régulièrement espacées.

75

00:07:39,400 --> 00:07:41,800

Pour chaque feuille,

vous allez prendre votre graphe,

76

00:07:41,900 --> 00:07:44,900

et l'axe horizontal correspond au nombre d'arêtes.

77

00:07:45,000 --> 00:07:48,900

L'axe vertical correspond au nombre de faces plus le nombre de sommets.

78

00:07:49,000 --> 00:07:54,900

A vaut 10, donc on va se placer sur l'axe horizontal au niveau du chiffre 10.

79

00:07:55,000 --> 00:08:02,500

Si vous calculez S+F, ça fait 6+6 donc 12, donc vous allez monter jusqu'à la graduation 12.

80

00:08:02,600 --> 00:08:05,500

Et vous allez tracer une croix ici.

81

00:08:05,600 --> 00:08:06,500

Mettez en pause la vidéo,

82

00:08:06,600 --> 00:08:10,000

et pour chaque graphe que vous avez dessiné, vous allez tracer un point.

83

00:08:56,000 --> 00:08:59,000

Voilà !

Vous avez obtenu des points sur un gaphe.

84

00:08:59,100 --> 00:09:03,500

Maintenant, je vais vous demander de mettre en pause la vidéo (encore une fois)

85

00:09:03,600 --> 00:09:08,900

et de discuter entre vous de la particularité de ces points que vous obtenez.

86

00:09:09,000 --> 00:09:12,000

Savez-vous pourquoi il y a une telle caractéristique ?

87

00:09:17,000 --> 00:09:23,900

Alors vous avez probablement remarqué

que tous les points, normalement, sont alignés.

88

00:09:24,000 --> 00:09:29,500

C'est-à-dire que, si vous prenez votre règle,

et que vous tracez une droite,

89

00:09:29,600 --> 00:09:33,500

vous allez arriver à tracer une droite qui

passe par tous les points.

90

00:09:33,600 --> 00:09:37,000

Je vous invite à tracer cette droite.

91

00:09:43,000 --> 00:09:50,000

Et vous allez voir que cette droite passe,

au niveau de l'axe vertical,

92

00:09:50,100 --> 00:09:53,100

au niveau du chiffre 2 (normalement).

93

00:09:58,000 --> 00:10:01,000

Comme équation, l'équation suivante,

94

00:10:01,100 --> 00:10:18,000

c'est-à-dire F+S = A+2

95

00:10:20,000 --> 00:10:24,500

Voilà.

Ou alors, écrit d'une autre manière,

96

00:10:24,600 --> 00:10:29,000

donc de manière équivalente, on peut aussi

faire passer le A de l'autre côté,

97

00:10:30,000 --> 00:10:39,000

et donc on obtient F-A+S=2

98

00:10:43,000 --> 00:10:44,900

Pourquoi a-t-on une telle équation ?

99

00:10:45,000 --> 00:10:50,000

Je vous laisse en discuter quelques instants

entre vous, donc mettez en pause la vidéo.

100

00:10:57,000 --> 00:11:02,500

Maintenant que vous avez discuté un peu de

savoir comment cette relation est vraie,

101

00:11:02,600 --> 00:11:09,000

cette relation F-A+S=2,

je vous propose de la montrer.

102

00:11:14,500 --> 00:11:18,600

Cette relation s'appelle

la relation d'Euler,

103

00:11:18,700 --> 00:11:22,000

d'après le nom du mathématicien Leonhard Euler.

104

00:11:22,200 --> 00:11:25,000

Voilà, merci d'avoir suivi cette vidéo !

105

00:11:25,800 --> 00:11:31,000

Sachez que des formules similaires existent

aussi pour des graphes non-planaires

106

00:11:31,200 --> 00:11:35,100

(ce sont des graphes où l'on peut autoriser

aussi des croisements)

107

00:11:36,000 --> 00:11:39,900

et cette relation d'Euler est vraiment

universelle et c'est pour ça que

108

00:11:40,000 --> 00:11:42,000

je la trouve très belle.

109

00:11:43,000 --> 00:11:46,900

Les chercheurs et les chercheuses qui font de

la combinatoire l'utilisent très souvent

110

00:11:47,000 --> 00:11:51,500

pour classer les graphes qu'iels étudient.

111

00:11:52,500 --> 00:11:57,000

Merci beaucoup d'avoir suivi cette vidéo et

à bientôt !